SESSION DE 1992

Options M et P′

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

La précision des solutions et la clarté de la mise en page seront des éléments essentiels dans l'appréciation des copies. En particulier aucune démonstration comportant l'application d'un théorème d'interversion de limites ne sera prise en compte en l'absence de son énoncé exact.

PREMIER PROBLÈME

Pour tout réel α et tout réel x on note : $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

L'objet du problème est l'étude de f_2.

Partie I

1. *a.* Donner suivant les valeurs de α l'ensemble de définition D_α de f_α.

   b. Pourquoi l'application f_α est-elle indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$?

2. Étude de la continuité et de la dérivabilité à droite en -1 :

   a. Pour quelles valeurs de α, f_α est-elle continue à droite en -1 ?

   b. Pour $\alpha > 1$, étudier la dérivabilité de f_α à droite en -1.

   c. Calculer $f_2'(-1)$ (nombre dérivé à droite de f_2 en -1).

3. Étude de la continuité et de la dérivabilité à gauche en 1 :

   a. Pour quelles valeurs de α, f_α est-elle continue à gauche en 1 ?

   b. Si $1 \notin D_\alpha$, montrer que $\lim_{x \to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$.

   c. Pour $\alpha > 2$, étudier la dérivabilité de f_α à gauche en 1.

Tournez la page S.V.P.

4. *a.* Étudier le signe de f'_α sur $]-1, 1[$ lorsque $\alpha > 1$.

   b. Exprimer $f_1(x)$ et $x f'_2(x)$ à l'aide de fonctions classiques sur $]-1, 1[$.

   c. Calculer la limite à gauche en 1 de f'_2.

5. Calcul de $f_2(1)$ et $f_2(-1)$:

   Soit g la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad g(x) = x^2.$$

   a. Énoncer le théorème de Dirichlet.

   b. En l'appliquant à la fonction g au point $x = 0$, calculer $f_2(1)$.

   c. En remarquant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, calculer $f_2(-1)$.

6. Construire le tableau de variation de f_2 ; puis tracer avec précision la courbe représentative de f_2 (choisir une unité de 5 cm environ).

Partie II

Dans cette partie, a_0 est un réel positif et $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1. Lorsqu'elle existe, on note $g(x)$ la somme de cette série. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par S_n la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. On suppose dans cette question que $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ converge et on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

   a. Donner le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 0} S_n x^n$ et la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

   b. En déduire que : $\forall x \in]-1, 1[, \quad \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$.

2. On suppose dans cette question que $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ diverge et que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite équivalente à $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

   a. Montrer que $\sum_{n \geqslant 0} b_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

   b. Prouver que :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} = 1.$$

3. Déduire des questions II.1. et II.2. que lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + (1 - x)\ln(1 - x) + o[(1 - x)\ln(1 - x)].$$